

Analiza Funkcjonalna

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 2

Przestrzenie funkcji ciągłych

math.uwb.edu.pl/~zaf/kwasniewski/pdf/skrypt.pdf

Przestrzenie funkcji ciągłych

Niech Ω będzie ustaloną przestrzenią topologiczną.

Przestrzeń funkcji ciągłych $C(\Omega) := \{x : \Omega \rightarrow \mathbb{F} \text{ funkcja ciągła}\}$
o wartościach w ciele $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ wraz z działaniami

$$(x+y)(t) := x(t)+y(t), \quad (\lambda x)(t) := \lambda x(t) \quad \left(\begin{array}{l} \text{działania} \\ \text{określone} \\ \text{punktowo!} \end{array} \right)$$

gdzie $x, y \in C(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{F}$, jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{F}$.

Przestrzeń funkcji ciągłych i ograniczonych

$$\begin{aligned} C_b(\Omega) &:= \{x \in C(\Omega) : \exists_M \forall_{t \in \Omega} |x(t)| \leq M\} \\ &= \{x \in C(\Omega) : \sup_{t \in \Omega} |x(t)| < \infty\} \end{aligned}$$

jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $C(\Omega)$, na której określona jest **norma supremum**

$$\|x\|_\infty := \sup_{t \in \Omega} |x(t)|.$$



Fakt. Zbieżność w normie $\|\cdot\|_\infty \equiv$ zbieżność jednostajna

$$\begin{aligned}x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} x &\iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_\infty = 0 \\&\iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \Omega} |x_n(t) - x(t)| = 0 \\&\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \sup_{t \in \Omega} |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon \\&\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \forall t \in \Omega |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon \\&\stackrel{\text{def}}{\iff} x_n \rightrightarrows x\end{aligned}$$

gdzie symbol $\rightrightarrows$ oznacza zbieżność jednostajną.

Prz. Ciąg $x_n(t) = t^n$ funkcji na $[0, 1]$ jest zbieżny punktowo do $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 1, & t = 1 \end{cases}$. Ale $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ nie jest zbieżny w normie $\|\cdot\|_\infty$.

Ciąg funkcji ciągłych, jeżeli jest zbieżny jednostajnie, to musi być zbieżny do funkcji ciągłej! 

Stw. $C_b(\Omega)$ z normą $\|x\|_\infty = \sup_{t \in \Omega} |x(t)|$ jest przestrzenią Banacha.

Dowód: Niech $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq C_b(\Omega)$ ciąg Cauchy. Dla każdego $t \in \Omega$



Twój kandydat w wyborach

Nikt wam tyle nie da, co ja wam naobiecuję

Stw. $C_b(\Omega)$ z normą $\|x\|_\infty = \sup_{t \in \Omega} |x(t)|$ jest przestrzenią Banacha.

Dowód: Niech $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq C_b(\Omega)$ ciąg Cauchy. Dla każdego $t \in \Omega$

$$|x_n(t) - x_m(t)| \leq \sup_{s \in \Omega} |x_n(s) - x_m(s)| = \|x_n - x_m\|_\infty \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0.$$

Czyli ciąg liczbowy $\{x_n(t)\}_{n=1}^\infty$ jest ciągiem Cauchy w ciele $\mathbb{F}$. Skoro $\mathbb{F}$ zupełne, to istnieje $x(t) \in \mathbb{F}$ takie, że $x_n(t) \rightarrow x(t)$ w $\mathbb{F}$. W ten sposób otrzymujemy funkcję liczbową $\Omega \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{F}$, która jest „kandydatem na granicę” ciągu $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Dla każdego $t \in \Omega$ mamy

$$|x_n(t) - x(t)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |x_n(t) - x_m(t)| \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\|_\infty.$$

Zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \Omega} |x_n(t) - x(t)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\|_\infty = 0.$$

$\{x_n\}_{n=1}^\infty$ jest Cauchy

Stąd $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} x$. Granica jednostajna ciągu funkcji ciągłych jest ciągła. Czyli $x \in C(\Omega)$. Co więcej, funkcja x jest ograniczona, bo

$$\|x\|_\infty \leq \|x - x_n\|_\infty + \|x_n\|_\infty < \infty. \quad \text{Czyli } x \in C_b(\Omega).$$

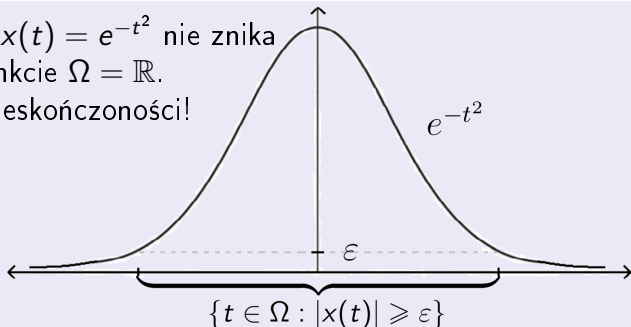
Funkcja ciągła na zbiorze zwartym osiąga swoje kresy!

Wn. Jeśli Ω zwarta, to $C(\Omega) = C_b(\Omega)$ oraz $\|x\|_\infty = \max_{t \in \Omega} |x(t)|$
(funkcja $|x(t)|$ osiąga swoje maksimum, w szczególności jest ograniczona)

Przestrzeń funkcji ciągłych znikających w nieskończoności

$$C_0(\Omega) := \left\{ x \in C(\Omega) : \forall_{\varepsilon > 0} \{t \in \Omega : |x(t)| \geq \varepsilon\} \text{ zbiór zwarty} \right\}$$

Prz. Funkcja $x(t) = e^{-t^2}$ nie znika
w żadnym punkcie $\Omega = \mathbb{R}$.
Ale znika w nieskończoności!



Uw. Jeśli Ω przestrzeń zwarta, to $C_0(\Omega) = C(\Omega) = C_b(\Omega)$.

Stw. $C_0(\Omega)$ jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Banacha $(C_b(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$. Zatem $(C_0(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ jest przestrzenią Banacha.

Dowód: Niech $x, y \in C_0(\Omega)$ i $\varepsilon > 0$. Zauważmy, że

$$\underbrace{\{t : |x(t) + y(t)| \geq \varepsilon\}}_{\text{domknięty}} \subseteq \underbrace{\{t : |x(t)| \geq \varepsilon/2\} \cup \{t : |y(t)| \geq \varepsilon/2\}}_{\text{zbiór zwarty, jako suma dwóch zwartych}}.$$

Zatem $\{t : |x(t) + y(t)| \geq \varepsilon\}$ zwarty, jako domknięty podzbiór zbioru zwartego. Czyli $x + y \in C_0(\Omega)$. Dla $\lambda \in \mathbb{F}$ zbiór

$$\{t : |\lambda x(t)| \geq \varepsilon\} = \{t : |x(t)| \geq \frac{\varepsilon}{|\lambda|}\} \text{ zwarty, więc } \lambda x \in C_0(\Omega).$$

Ponadto, $\|x\|_\infty = \max_{t \in \Omega} |x(t)| < \infty$, bo $|x(t)|$ ciągła na zbiorze zwartym $\{t : |x(t)| \geq \varepsilon\}$. Zatem $C_0(\Omega) \subseteq C_b(\Omega)$ podprzestrzeń.

„Domkniętość”: Niech $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq C_0(\Omega)$ ciąg zbieżny do pewnego $x \in C_b(\Omega)$. Dla dużych $n \in \mathbb{N}$ mamy $\|x_n - x\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ i wtedy

$$\{t : |x(t)| \geq \varepsilon\} \subseteq \{t : |x_n(t)| \geq \varepsilon/2\}.$$

Stąd $\{t : |x(t)| \geq \varepsilon\}$ zwarty, jako domknięty podzbiór zbioru zwartego. Zatem $x \in C_0(\Omega)$. ■

Na przestrzeni dyskretnej wszystkie funkcje są ciągłe!
Ciągi to funkcje na zbiorze $\mathbb{N}$!

Wn. Jeśli $\Omega = \mathbb{N}$ jest przestrzenią dyskretną, to $C_b(\Omega)$ można utożsamić z **przestrzenią ciągów ograniczonych**:

$$\ell^\infty := \{x = (x(1), x(2), \dots) : \sup_{k \in \mathbb{N}} |x(k)| < \infty\}$$

wyposażoną w normę $\|x\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{N}} |x(k)|$. Natomiast $C_0(\Omega)$

można utożsamić z **przestrzenią ciągów zbieżnych do zera**:

$$c_0 := \{x = (x(1), x(2), \dots) : \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = 0\}.$$

Dowód: Znikanie w nieskończoności funkcji $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{F}$ jest równoważne temu, że ciąg $\{x(k)\}_{k=1}^\infty$ zbiega do zera: w przestrzeni
dyskretnej

$$x \in C_0(\mathbb{N}) \iff \forall_{\varepsilon > 0} \{k \in \mathbb{N} : |x(k)| \geq \varepsilon\} \text{ zwarty} = \text{skończony}$$

$$\iff \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{k > N} |x(k)| < \varepsilon \iff x \in c_0.$$

Rozważmy również **przestrzeń ciągów zbieżnych**:

$$c := \{x = (x(1), x(2), \dots) : \exists_{x(\infty) \in \mathbb{F}} \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = x(\infty)\}.$$

Jako że ciągi zbieżne są ograniczone oraz granica zachowuje kombinacje liniowe, to c jest podprzestrzenią liniową ℓ^∞ . Ponadto c jest domknięta w ℓ^∞ . Aby to udowodnić, trzeba pokazać, że

„ciąg zbieżny ciągów zbieżnych jest zbieżny do ciągu zbieżnego” 

Wn. Mamy następujące przestrzenie Banacha

$$c_0 \subseteq c \subseteq \ell^\infty$$

z normą $\|x\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{N}} |x(k)|$.

Uw. Przestrzeń ciągów skończonych:

$$c_{00} = \{x = (x(1), x(2), \dots, x(N), 0, 0, \dots) : N \in \mathbb{N}, x(k) \in \mathbb{F}\}.$$

jest gęstą podprzestrzenią przestrzeni c_0 .



Nośnikiem funkcji $x : \Omega \rightarrow \mathbb{F}$ nazywamy zbiór domknięty

$$\text{supp}(x) := \overline{\{t \in \Omega : x(t) \neq 0\}}.$$

Prz. Jeśli $\Omega = \mathbb{R}$ oraz $x = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, to $\text{supp}(x) = \Omega$.

Lem. Przestrzeń funkcji ciągłych o zwartych nośnikach

$$C_c(\Omega) := \{x \in C(\Omega) : \text{supp}(x) \text{ jest zbiorem zwartym}\}$$

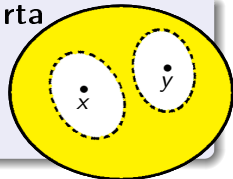
jest podprzestrzenią liniową przestrzeni Banacha $C_0(\Omega)$.

Dowód: $C_c(\Omega) \subseteq C_0(\Omega)$, gdyż $\{t \in \Omega : |x(t)| \geq \varepsilon\} \subseteq \text{supp}(x)$ oraz domknięty podzbiór zbioru zwartego jest zwarty. Ponadto $\text{supp}(\lambda x) = \text{supp}(x)$ dla $\lambda \neq 0$ oraz

$$\text{supp}(x + y) \subseteq \text{supp}(x) \cup \text{supp}(y).$$

Stąd wynika, że $C_c(\Omega)$ jest przestrzenią liniową. ■

Def. Przestrzeń topologiczna Ω jest **lokalnie zwarta** jeśli każdy punkt w Ω ma otoczenie zwarte
 Ω jest przestrzenią **Hausdorffa** jeśli każde dwa różne punkty mają rozłączne otoczenia.

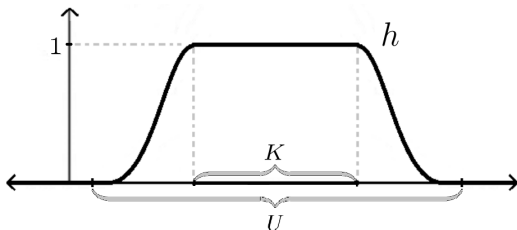


Prz. Każdy otwarty lub domknięty podzbiór $\mathbb{R}^n$ jest lokalnie zwarty. Każda przestrzeń metryczna jest Hausdorffa.



Tw. (Lemat Urysohna). Ω lokalnie zwarta przestrzeń Hausdorffa

Jeśli $K \subseteq U \subseteq \Omega$, gdzie K zwarty i U otwarty, to istnieje funkcja ciągła $h : \Omega \rightarrow [0, 1]$ ze zwartym nośnikiem zawartym w U oraz przyjmująca wartość 1 na K : $\text{supp}(h) \subseteq U$ oraz $h|_K \equiv 1$.



Urysohn

Wn. Jeśli Ω lokalnie zwarta Hausdorffa, to $\overline{C_c(\Omega)} = C_0(\Omega)$.
Zatem $C_0(\Omega)$ jest uzupełnieniem $C_c(\Omega)$ w normie supremum.

Dowód: Niech $x \in C_0(\Omega)$. Dla każdego n połóżmy

$$K_n := \{t : |x(t)| \geq 1/n\}, \quad U_n := \{t : |x(t)| > 1/(n+1)\}.$$

Wtedy K_n zwarty, U_n otwarty oraz $K_n \subseteq U_n$. Na mocy **Lematu Urysohna** istnieje $h_n \in C_c(\Omega)$ taka, że $0 \leq h \leq 1$, $h_n|_{K_n} = 1$ oraz $\text{supp}(h_n) \subseteq U_n$. Kładąc $x_n := x \cdot h_n$ mamy $x_n \in C_c(\Omega)$ oraz

$$\|x_n - x\|_\infty = \sup_{t \in \Omega} |x(t)h(t) - x(t)| = \sup_{t \in \Omega \setminus K_n} |x(t)h(t) - x(t)| \leq 2/n.$$

Zatem $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq C_c(\Omega)$ zbiega do $x \in C_0(\Omega)$. ■

Prz. Dla przestrzeni dyskretnej $\Omega = \mathbb{N}$ przestrzeń funkcji $C_c(\Omega)$ możemy utożsamić z **przestrzenią ciągów skończonych**:

$$c_{00} = \{x = (x(1), x(2), \dots, x(N), 0, 0, \dots) : N \in \mathbb{N}, x(k) \in \mathbb{F}\}.$$

W szczególności, c_{00} jest gęstą podprzestrzenią przestrzeni c_0 .



Podsumowanie (ściągałka)

$C(\Omega)$ - przestrzeń funkcji ciągłych (przestrzeń liniowa)

$C_b(\Omega)$ - przestrzeń funkcji ciągłych i ograniczonych

$C_0(\Omega)$ - przestrzeń funkcji ciągłych i znikających w ∞

przestrzeń
Banacha z normą
 $\|x\|_\infty = \sup_{t \in \Omega} |x(t)|$

$C_c(\Omega)$ - przestrzeń funkcji ciągłych o zwartych nośnikach

$$C_c(\Omega) \subseteq C_0(\Omega) \subseteq C_b(\Omega) \subseteq C(\Omega)$$

$$\Omega \text{ zwarta} \iff C_c(\Omega) = C_0(\Omega) = C_b(\Omega) = C(\Omega)$$

$$\Omega \text{ lokalnie zwarta Hausdorffa} \implies \overline{C_c(\Omega)}^{\|\cdot\|_\infty} = C_0(\Omega)$$

ℓ^∞ - przestrzeń ciągów ograniczonych

c - przestrzeń ciągów zbieżnych

c_0 - przestrzeń ciągów zbieżnych do zera

przestrzeń Banacha z normą
 $\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x(k)|$

c_{00} - przestrzeń ciągów skończonych (niezupełna)

$$c_{00} \subseteq c_0 = \overline{c_{00}}^{\|\cdot\|_\infty} \subseteq c \subseteq \ell^\infty$$